試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。

平成 31 年度　一般入試　「後期日程」
個別学力検査　問題

数　学

注　意　事　項

1. 数学の問題は問題 1 から問題 4 までの，6 ページです。
2. 解答用紙は $\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ の，4 枚です。
3. 解答用紙の受験番号欄に受験番号を，氏名欄に氏名を記入しなさい。
4. 解答は全て解答用紙の指定された枠内に記入しなさい。
   枠外や裏面に記入してはいけません。

問題 1　以下の空欄 (i)~(xi) をうめよ．なお，(10) については (a)~(d) の中から適切なものを選べ．

(1) $\log_3 9 + \log_9 27 + \log_{27} 3 = \boxed{\text{(i)}}$

(2) $y = \sin\sqrt{x^2+1}$ の導関数は $y' = \boxed{\text{(ii)}}$ である．

(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2018}}{x^{2019}+1}\,dx = \boxed{\text{(iii)}}$

(4) 2 つの集合

$$X = \{n \mid n \text{ は自然数}, 1 \leqq n \leqq 100\}, \quad Y = \{n \mid n \text{ は 21 と互いに素な自然数}\}$$

の共通部分 $X \cap Y$ の要素の個数は $\boxed{\text{(iv)}}$ である．

(5) CURLING の 7 文字のすべてを用いて作る順列を考える．このとき，両端が子音 (C, R, L, N, G) であるような順列の総数は $\boxed{\text{(v)}}$ である．

(6) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2019} \frac{1}{k^2+5k+6} = \boxed{\text{(vi)}}$

(7) $0 \leqq \theta \leqq \pi$ とする．方程式 $\sin\theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta = 0$ の解は $\boxed{\text{(vii)}}$ である．

(8) i を虚数単位とする．複素数平面上で等式 $|2iz-3| = 4$ を満たす点 z の全体は中心 $\boxed{\text{(viii)}}$，半径 $\boxed{\text{(ix)}}$ の円である．

(9) 今日から次の日への天気の変化の確率が，下の表で与えられているとする．例えば，今日が「くもり」のとき，明日「雨」になる確率は 0.7 である．

		次の日の天気		
		晴れ	雨	くもり
今日の天気	晴れ	0.5	0.1	0.4
	雨	0.3	0.5	0.2
	くもり	0.2	0.7	0.1

今日が「雨」のとき，2 日後（明後日）が「晴れ」となる確率は $\boxed{\text{(x)}}$ である．

(10) 「$3 \leqq x \leqq 5$」は「$|2x-6| \leqq x$」であるための $\boxed{\text{(xi)}}$.

(a) 必要十分条件である

(b) 十分条件だが必要条件ではない

(c) 必要条件だが十分条件ではない

(d) 必要条件でも十分条件でもない

問題 2

a を $0 < a < 1$ を満たす実数とし，$f(x) = -x^2 + 1$ とする．放物線 $y = f(x)$ を直線 $x = \dfrac{a}{2}$ に関して対称移動してできる放物線を $y = g(x)$ とし，$y = g(x)$ を y 軸に関して対称移動してできる放物線を $y = h(x)$ とする．次の問に答えよ．

(1) 関数 $h(x)$ を求めよ．

(2) xy 平面で，x 軸と $y = g(x)$ で囲まれた図形を D_1，x 軸と $y = h(x)$ で囲まれた図形を D_2 とし，$D = D_1 \cup D_2$ とする．D を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を a を用いて表せ．

(3) (2) で定めた D を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 W を a を用いて表せ．

問題 3

座標空間の点 $\mathrm{A}(1,0,0)$, $\mathrm{B}(0,1,0)$, $\mathrm{C}(0,0,1)$, $\mathrm{P}\left(t, t, \dfrac{t}{2}\right)$ を考える．ただし，t は実数とする．次の問に答えよ．

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ の内積を t で表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{PA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{PB}}$ となる t の値を求めよ．

(3) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ のなす角を θ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ とする．θ の最大値を与える t の値を求めよ．

(4) 3 点 A, B, C の定める平面に点 P が含まれるとき，t の値を求めよ．

問題 4　以下の文を読み，その中にある問に答えよ．

---

n を自然数（1 以上の整数）とし，$I_n = \{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$ を，n から始まる 6 個の連続した自然数の集合とする．

この I_n を 2 つの空集合ではない部分集合 A，B に分割し，それぞれの部分集合に含まれる自然数の積を考える．より正確に述べると，次のようになる．

定義：

(1)　I_n の 2 つの空集合ではない部分集合の組 $\{A, B\}$ が I_n の **分割** であるとは，

$$A \cup B = I_n \ , \qquad A \cap B = \varnothing$$

となることである．すなわち I_n の分割とは，I_n を互いに交わらない 2 つの集合に分けることである．ここで $\varnothing$ は空集合を意味する．

(2)　C を I_n の空集合ではない部分集合とするとき，C に含まれるすべての自然数の積を $d(C)$ で表す．

I_n の分割 $\{A, B\}$ があると，2 つの数 $d(A), d(B)$ が定まる．

例えば $n = 3$ の場合，$I_3 = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ である．$A = \{3, 6, 8\}$，$B = \{4, 5, 7\}$ という分割では，

$$d(A) = 3 \cdot 6 \cdot 8 = 144, \qquad d(B) = 4 \cdot 5 \cdot 7 = 140$$

である．$A = \{3, 7\}$，$B = \{4, 5, 6, 8\}$ という分割では，

$$d(A) = 3 \cdot 7 = 21, \qquad d(B) = 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 = 960$$

となる．

例えば $n = 17$ の場合，$I_{17} = \{17, 18, 19, 20, 21, 22\}$ である．$A = \{17, 18, 21, 22\}$，$B = \{19, 20\}$ という分割では，

$$d(A) = 17 \cdot 18 \cdot 21 \cdot 22 = 141372, \qquad d(B) = 19 \cdot 20 = 380$$

である．$A = \{17, 20, 22\}$，$B = \{18, 19, 21\}$ という分割では，

$$d(A) = 17 \cdot 20 \cdot 22 = 7480, \qquad d(B) = 18 \cdot 19 \cdot 21 = 7182$$

となる．

このように，いろいろな n について，I_n をいろいろなやり方で分割してみても，$d(A)$ と $d(B)$ が同じ数になることがない，ということに気がつく．実は，次の定理が成り立つ．

定理： すべての自然数 n に対して，I_n のどんな分割 $\{A, B\}$ をとっても，$d(A) \neq d(B)$ である．

以下ではこの定理を証明する．

定理の証明：

証明は背理法で行う．つまり，この定理が成り立たないと仮定すると矛盾が生じる，ということを示す．

この定理が成り立たないと仮定しよう．つまり，ある自然数 n と，
$I_n = \{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$ のある分割 $\{A, B\}$ があって，$d(A) = d(B)$ となるものが存在する．

以下では，そのような I_n, A, B を考える．

次の主張が成り立つ．

主張 1： I_n に含まれるすべての自然数は 7 以上の素因数を持たない．

主張 1 の証明： この主張 1 を言いかえると，I_n の中のすべての自然数は，7 以上の素数で割り切れることはない，あるいは，7 以上の素数の倍数ではない，ということである．

この主張を背理法で証明する．すなわち，I_n の中の 1 つの要素 $n+k$ $(0 \leqq k \leqq 5)$ が，ある 7 以上の素数 p の倍数であると仮定する．矛盾が生じることを示せばよい．

p の倍数は，連続した p 個の自然数の中に 1 つしかない．$6 < p$ なので，連続した 6 個の自然数である I_n の中にも p の倍数は最大 1 つしかない．すなわち，I_n の中の p の倍数は $n+k$ だけであり，I_n の他の数は p の倍数ではない．$n+k$ は A と B のどちらかに含まれている．

$n+k$ が A に含まれているとすると，

これは $d(A) = d(B)$ であることに矛盾する．$n+k$ が B の方に含まれている場合も同様に矛盾が生じる．[主張 1 の証明終り]

> **問 1：** 上の「主張 1 の証明」中の空白部分に適切な文章や数式などを記入し，主張 1 の証明を完成させよ．

このことから，I_n の中のすべての数は 2, 3, 5 のみを素因数に持つことがわかった．

さらに，次のことがわかる．

> **主張 2：** I_n の中の $n+1, n+2, n+3, n+4$ はすべて 5 の倍数ではない．

主張 2 の証明： これも背理法で証明する．この主張が成り立たないと仮定すると，ある $n+k$ $(1 \leqq k \leqq 4)$ で，5 の倍数となるものが存在することになる．

[主張 2 の証明終り]

問２： 上の「主張２の証明」中の空白部分に適切な文章や数式などを記入し，主張２の証明を完成させよ．

このことから，$n+1, n+2, n+3, n+4$ の４個の数は５の倍数ではない．I_n に含まれる数の素因数は 2, 3, 5 のみなので，これらの４個の数の素因数は２と３だけである．すなわち，これら４個の数はすべて，いくつかの２と３の積でできている．

これら連続した４個の数は,「偶数，奇数，偶数，奇数」と並んでいるか，または,「奇数，偶数，奇数，偶数」と並んでいるかのどちらかである．どちらの場合であっても，これら４個の数の中には，差が２の２つの奇数が存在することになるが，このようなことはあり得ない．なぜなら，

[定理の証明終り]

問３： 上の空白部分に適切な文章や数式などを記入し，定理の証明を完成させよ．