試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。

令和5(2023)年度　入学者選抜
一般選抜　「後期日程」

個別学力検査　問題

数　学

注　意　事　項

1. 数学の問題は問題1から問題4までの，6ページです。
2. 解答用紙は $\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ の，4枚です。
3. 解答用紙の受験番号欄に受験番号を，氏名欄に氏名を記入しなさい。
4. 解答は全て解答用紙の指定された枠内に記入しなさい。
   枠外や裏面に記入してはいけません。

問題 1　以下の空欄 (i) ～ (x) をうめよ．なお，(10) については，(a) ～ (d) の中から適切なものを選べ．

(1) $y = \log(x + \cos x)$ の導関数は，$y' = \boxed{\text{(i)}}$ である．

(2) データ x_1，x_2，$\cdots$，x_n の平均値が 40，標準偏差が 20 であるとする．正の実数 a と実数 b に対して，データ $ax_1 + b$，$ax_2 + b$，$\cdots$，$ax_n + b$ の平均値が 80，標準偏差が 10 となるとき，$(a, b) = \boxed{\text{(ii)}}$ である．

(3) 表に A，裏に B と書かれたカードが 3 枚，表と裏の両面に A と書かれたカードが 2 枚ある．この 5 枚のカードを袋に入れ，無作為に 2 枚取り出して机に置くとき，置かれるカードの文字がともに A となる確率は $\boxed{\text{(iii)}}$ である．ただし，置かれるカードの表が出る確率と，裏が出る確率は等しいとする．

(4) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x\sqrt{x+1}\,dx = \boxed{\text{(iv)}}$ である．

(5) 1000 以上 2023 以下の自然数の中で，3 と 4 の少なくとも一方で割り切れるものの個数は $\boxed{\text{(v)}}$ である．

(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{2n} k^2 = \boxed{\text{(vi)}}$ である．

(7) $\sin\dfrac{\pi}{6}$，$\cos\dfrac{\pi}{6}$，$\tan\dfrac{\pi}{6}$，$\log\dfrac{\pi}{6}$ を小さい順に並べると $\boxed{\text{(vii)}}$ となる．

(8) $2\log_2(x-2) \leqq 1 + \log_2(x-1)$ を満たす x のとり得る値の範囲は $\boxed{\text{(viii)}}$ である．

(9) $\theta = \dfrac{\pi}{15}$ のとき，$\dfrac{(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)^4}{\cos 3\theta + i\sin 3\theta} = \boxed{\text{(ix)}}$ となる．

(10) 「$x^2+2x-8 \leqq 0$」は「$x^2-7x+12 \geqq 0$」であるための $\boxed{\text{(x)}}$.

(a) 必要十分条件である

(b) 十分条件であるが必要条件でない

(c) 必要条件であるが十分条件でない

(d) 必要条件でなく十分条件でもない

問題 2 4次関数 $f(x) = -x^4 + 2x^2 - 1$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の増減を調べよ．また，$f(x)$ の極大値と，そのときの x の値をすべて求めよ．さらに，$f(x)$ の極小値と，そのときの x の値をすべて求めよ．

(2) 曲線 $y = f(x)$ の変曲点の座標をすべて求めよ．また, それぞれの変曲点における $y = f(x)$ の接線の方程式を求めよ．

(3) $y = f(x)$ のグラフが下に凸になる x の範囲を求めよ．

(4) xy 平面内に曲線 $y = f(x)$ の概形をかけ．さらに, (2) で求めた変曲点における接線を，曲線 $y = f(x)$ と同じ xy 平面内にかけ．

問題 3 xy 平面において，円 $x^2+y^2=1$ を E とする．また，k を正の実数とし，放物線 $y=kx^2$ を H とする．さらに，円 E 上の点 $\mathrm{P}(s,t)$ における E の接線を ℓ_1 とし，放物線 H 上の点 $\mathrm{Q}\left(u,ku^2\right)$ における H の接線を ℓ_2 とする．ただし，$s>0$，$t<0$，$u>0$ とする．放物線 H，接線 ℓ_2 および y 軸で囲まれる図形の面積を A とする．以下の問いに答えよ．

(1) 接線 ℓ_1，ℓ_2 の方程式をそれぞれ求めよ．

(2) t を s を用いて表せ．

(3) ℓ_1 と ℓ_2 が一致するとき，u と k を s を用いてそれぞれ表せ．

(4) ℓ_1 と ℓ_2 が一致するとき，面積 A を s を用いて表せ．

(5) ℓ_1 と ℓ_2 が一致するとき，面積 A の最小値と，そのときの s の値を求めよ．

問題 4 以下のカーリングを題材にした課題と，それに対する北見さんの考察を読み，文章中の問 1 ～ 問 4 に答えよ．

課題

xy 平面において，半径 1 の円をカーリングストーンとみなす．ストーン S_1 の中心は $(4,0)$ に置かれているとする．プレイヤーは，y 軸上の好きな位置から，x 軸の正の方向にストーン S_2 を投げる．ただし，投げたストーンの中心が直線上を移動するものとする．このとき，S_2 が S_1 に当たるための条件を自由に考察せよ．

【北見さんの考察１】

ストーン S_2 を投げる y 軸上の位置を $(0,b)$ とし，S_2 の中心が直線 $\ell : y = ax + b$ 上の $x \geqq 0$ の範囲を動くとする．ただし，a，$b \geqq 0$ とする．ここにおいて，$a > 1$ または $b > 2$ ならば，S_2 が S_1 に当たらないことは明らかである．したがって，a と b のとり得る値の範囲を，それぞれ $0 \leqq a \leqq 1$，$0 \leqq b \leqq 2$ として考える．

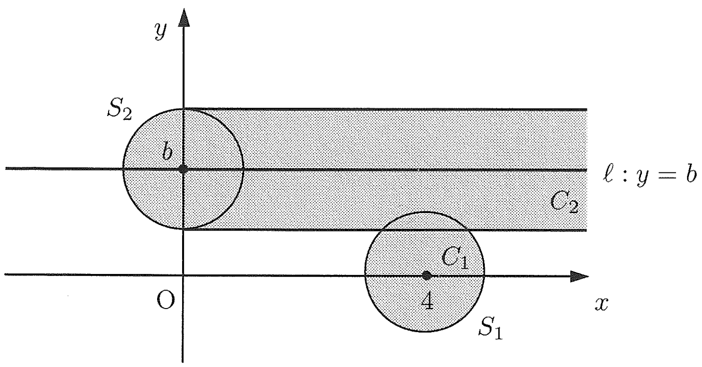
半径 1，中心 $(4,0)$ の円の周および内部を C_1 とする．半径 1 の円の中心が ℓ 上の $x \geqq 0$ の範囲を動くとき，その円の周および内部が通過する部分を C_2 とする．C_1 と C_2 の共通部分がある，すなわち，$C_1 \cap C_2$ が空集合でないとき，S_2 が S_1 に当たると判定する．

問 1

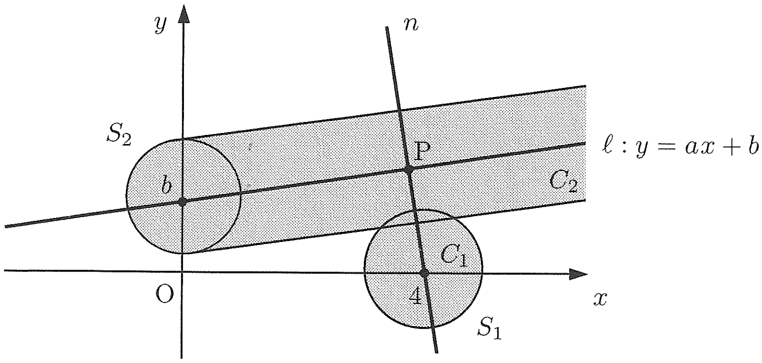
$a = \dfrac{1}{2}$ かつ $b = 0$ のとき，S_2 が S_1 に当たるかどうかを答えよ．なお，証明はしなくてよい．

【北見さんの考察２】

次に，S_2 が S_1 に当たるとき，a と b が満たす条件を考える．$a = 0$ ならば，S_2 が S_1 に当たるときの条件は，$0 \leqq b \leqq 2$ のすべてであることがすぐにわかる．



$a>0$ とする．また，直線 ℓ と垂直に交わり，点 $(4,0)$ を通る直線を n とし，ℓ と n の交点を P とする．点 $(4,0)$ と直線 ℓ の距離は，点 $(4,0)$ と点 P の距離に等しい．



問 2

$a>0$ のとき，点 $(4,0)$ と直線 ℓ の距離を a と b を用いて表せ．

問 3

$0 \leqq a \leqq 1$，$0 \leqq b \leqq 2$ において，S_2 が S_1 に当たるとき，a と b が満たす条件を求めよ．さらに，この条件が成立するような点 (a,b) の領域を ab 平面内に図示せよ．

【北見さんの考察３】

問３で示した，S_2 が S_1 に当たる点 (a,b) の領域の面積を M とする．直線 ℓ と x 軸のなす角を θ とすると，$a=\tan\theta$ であることを利用して，M の値を求めることができる．

問 4

M の値を求めよ．必要ならば，次の式が成り立つことを用いてよい．

$$\int \sqrt{a^2+1}\,da = \frac{\tan\theta}{2\cos\theta} + \frac{1}{2}\int \frac{d\theta}{\cos\theta}$$

$0 \leqq a \leqq 1$，$0 \leqq b \leqq 2$ が表す部分の面積は 2 である．したがって，この中で，S_2 が S_1 に当たるような点の領域と，当たらないような点の領域の面積の比は $M:(2-M)$ であると考えられる．